

Математические модели
в инвестиционных банках
**Расчет честной цены биржевых и
внебиржевых инструментов**

Валерий Овчинников

март 2016

Технологический центр Дойче Банка





- Обмен валют. Валютная биржа
- Фьючерсы. Идём глубже
- Форварды. За пределами биржи
- PV и Yield Curves
- Свопы. Запрещенная магия
- Собираем все вместе







Автор: eborutta из немецкой Википедии, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=436667>



Биржа

Она же Exchange, место обмена. Forex – Foreign Exchange, то есть обмен иностранной валютой.

Брокер

Человек (организация), с помощью которого вы все-таки можете получить доступ к бирже, естественно, за процент от ваших транзакций.

Отличительные черты биржевой торговли:

- Все сделки застрахованы биржей
- Стандартные котракты
- Платите и брокеру и бирже за транзакции



Валютная пара

USDRUB = 72p

Первую валюту (underlying) покупают/продают за вторую (accounting). Купить USDRUB значит купить USD, отдав RUB.

Спот

$$N_f = S \cdot N_I$$

Сделка по обмену валютой прямо сейчас (на самом деле нет). Вы фиксируете цену и объем сделки, нажимаете кнопку купить, и через (обычно) два дня к вам приезжает крутой грузовик с деньгами.

Для разных бирж и разных валютных пар могут быть разные периоды времени до поставки валюты. Они обозначаются $T+1$, $T+2$, $T+3$, $T+0$, где T – сейчас.



Автор: Dgeise - собственная работа, Общественное достояние,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=31614499>



Стакан

Продажа	Цена	Покупка
	1 933,4	322
	1 933,5	323
	1 933,6	71
	1 933,9	12
	1 934,0	110
	1 934,5	1
	1 934,6	502
1 858	1 935,0	
32	1 935,6	
68	1 935,7	
100	1 935,8	
100	1 936,0	
100	1 936,8	
362	1 936,9	

$$A > B \rightarrow Ask > Bid$$



Pips



А что, если в отпуск только через полгода?



Автор: Jean-Pol GRANDMONT - собственная работа, CC BY 2.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=170989>



Процентные ставки (Interest rates)

Любой процент в сделке, например, по депозиту или по кредиту. Обозначать будем r .

Безрисковые процентные ставки

Такая процентная ставка, под которую можно положить деньги в банк. Причем банк почти наверное не обанкротится. Измерять будем в процентах годовых.

Сколько сегодня стоит право получить 100 рублей через год? Чтобы ответить на этот вопрос, решим обратную задачу. Сколько нужно положить в банк сегодня, чтобы получить 100 рублей через год?



Ежегодное

Считаем, что начисленные проценты добавляются ко вкладу и на них тоже начинают капать проценты. Если сегодня у нас есть N денег, то при начислении процентов раз в год, при процентной ставке r , через t лет мы получим:

$$F = (1 + r)^t N \implies N = \frac{1}{(1 + r)^t} F = D(t) \cdot F$$

где $D(t)$ — коэффициент дисконтирования (discount factor). То есть, положив деньги на счет, заработаем мы F .

А чтобы понять сколько сегодня стоят 100 рублей через год, нужно их продисконтировать: $F = 100, N = 100D(1y)$.



Чаще раза в год

Если выплаты происходят n раз в год, то

$$D(t) = \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}}$$

В пределе, когда проценты начисляются постоянно, т.е. $n \rightarrow \infty$:

$$D(t) = e^{-rt}$$

Далее будем пользоваться непрерывно начисляемыми процентами.



Государственные облигации

Treasury bonds. Долговое обязательство государства выплатить по истечении некоторого срока зафиксированную в контракте сумму в валюте выпустившего облигацию государства.

Считаются безрисковыми.

У некоторых облигаций есть купоны. Купоны это небольшие фиксированные суммы, которые периодически выплачиваются владельцу облигации до истечения срока облигации.

Стоимость облигации

Это просто текущая суммарная стоимость всех платежей по этой облигации.

$$P_{bond} = \sum_{i=1}^{n-1} N_c e^{-r_i t_i} + N_p e^{-r_n t_n}$$



Государственные облигации. Пример

Пусть есть bond: principal 100\$ на 5 лет, coupon 5\$ выплачивается раз в полгода, и все процентные ставки, независимо от периода, равны 3%. Тогда стоимость облигации будет:

$$\sum_{i=1}^9 5e^{-0.03 \frac{i \cdot 180}{360}} + 100e^{-0.03 \frac{5 \cdot 360}{360}} = 127.85\$$$



Эффективный рынок

Будем работать в модели эффективного рынка:

- 1 Участники рынка много и ни у кого из них нет досточного количества денег, чтобы манипулировать рынком
- 2 Все участники имеют равный доступ к информации
- 3 Накладные расходы на торговлю равны нулю
- 4 При прочих равных, каждый участник не упускает возможность заработать



Цена контракта

Предположим, у нас есть $N = 1000$ USD. Текущий курс $\text{USDRUB} = S = 72$, процентные ставки $r_{USD} = 3\%$, $r_{RUB} = 15\%$. Фьючерс истекает через $t=1$ год. Какой должна быть цена фьючерса?

- 1 Мы можем положить N USD на вклад на год и продать фьючерс. Получим $Ne^{r_{USD}t}$ долларов и обменяем их по фьючерсному контракту, т.е. получим $FNe^{r_{USD}t}$ рублей.
- 2 Мы также можем купить SN рублей сейчас и положить их на счет. Получим $SNe^{r_{RUB}t}$ рублей через год.

Правила эффективного рынка утверждают, что количество рублей в обоих случаях должно быть одинаковым.

$$FNe^{r_{USD}t} = SNe^{r_{RUB}t} \implies F = Se^{(r_{RUB} - r_{USD})t}$$

$$F = 72e^{(0.15 - 0.03) \cdot 1} = 81.179$$



No-arbitrage rule

Предположим, что цена на фьючерс ниже только что посчитанной:

$$S = 72, r_{USD} = 3\%, r_{RUB} = 15\%, F = 79$$

Если положить доллары на счет, то через год имеем: 1030.45.
Если купить рубли, положить их на счет и купить фьючерс, то получим:

$$\frac{1000 \cdot 72e^{0.15}}{79} = 1058.88$$

Умные инвесторы эффективного рынка видят эту возможность. Покупают рубли, значит, растет цена рубля – S уменьшается. Одновременно покупают фьючерсы – F растет. Соответственно, если цена завышена, инвесторы побегут скупать доллары.



CME EURUSD Future

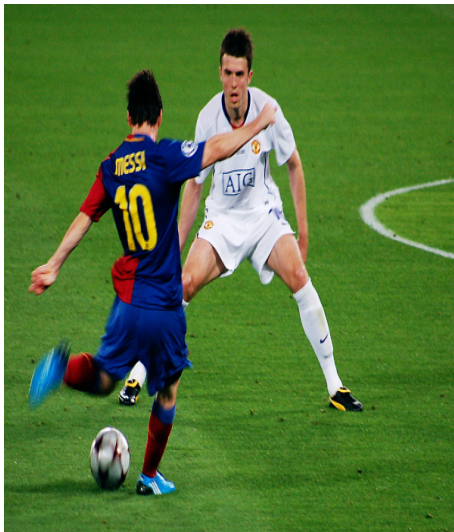
http://www.cmegroup.com/trading/fx/g10/euro-fx_contract_specifications.html

- **Contract Unit** 125,000 euro
- **Minimum Price Fluctuation** \$.00005 per euro increments (\$6.25/contract)
- **Listed Contracts** Twenty months in the March quarterly cycle (Mar, Jun, Sep, Dec)

Форвард



Форвард – это как фьючерс, только форвард.



By funnydae - 039 men at work_ UEFA 2009, Rome CC BY 2.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=7017865>



Over-The-Counter

Вне биржи. На ОТС рынке можно покупать сколь угодно кастомизированные и сложные инструменты. Торгуют ОТС с диллерами.

Диллер

Диллер это ваша собственная биржа-брокер. ОТС вы заключаете контракты с диллером. Диллерами обычно являются крупные инвестиционные институты, например, Deutsche Bank.



Forward vs. Future

- 1 Фьючерсные контракты имеют фиксированную спецификацию. В форварде вы можете указывать все, что пожелаете.
- 2 Фьючерсные контракты заключаются на бирже, значит застрахованы. Форвардные контракты аннулируются в случае банкротства диллера.
- 3 На бирже есть маржа и маржин-колл. Поэтому settlement происходит каждый день. У форварда *возможно* сделать коллатерализацию.



Present Value

Текущая стоимость. То есть, если у вас есть портфель инструментов, у которых есть будущие платежи, PV такого портфеля это сумма текущих стоимостей всех платежей в портфеле.

Forward vs. Future

Forward:

$$\begin{aligned} PV_{Forward} &= (N_{UND}F)e^{-r_{ACC}t} - (N_{UND}K)e^{-r_{ACC}t} = \\ &= N_{UND}(Se^{-r_{UND}t} - Ke^{-r_{ACC}t}) \end{aligned}$$

Future:

$$PV_{Future} = N_{UND}(F - K) = N_{UND}(Se^{(r_{ACC}-r_{UND})t} - K)$$



Forward vs. Future. Пример

Возьмем фьючерс и форвард на 3 месяца по паре USDRUB.

$r_{USD} = 3\%$, $r_{RUB} = 15\%$, $S = 72$, $K = 73$, $N = 1000\text{\$}$,

$F_{fair} = 74.19$.

$$PV_{Forward} = 1000(72e^{-0.03 \cdot \frac{90}{360}} - 73e^{-0.15 \cdot \frac{90}{360}}) = 1148.83$$

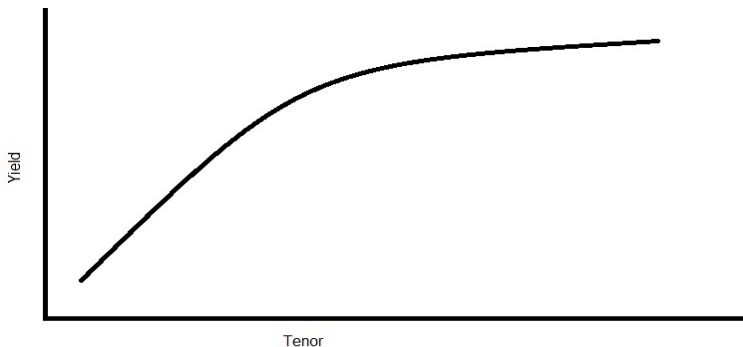
Future:

$$PV_{Future} = 1000(72e^{(0.15-0.03) \cdot \frac{90}{360}} - 73) = 1000(74.19 - 73) = 1190$$



Yield Curve

Функция $r(t)$, выражающая зависимость процентной ставки от срока вклада.





Из каких инструментов строить

- Государственные облигации
- LIBOR rates, eurodollars, swaps
- OIS/fed fund future



Своп – это как два форварда, только один.

~~std::swap~~



Валютный своп. Пример

Валютный своп чаще всего представляет собой спот сделку + форвард сделку.

Цена свопа это разница курсов на дальней и ближней ноге.

Валютный своп. Пример

$$N_{USD}^{near} = 1'000'000, N_{RUB}^{near} = 72'000'000, S = 72,$$

$$N_{USD}^{far} = 1'000'000, N_{RUB}^{far} = 74'190'000, K = 74.19$$

$$SWAP_PRICE = 219\text{ pips}$$

Упражнение

Вывести формулу для PV валютного свопа.